§5 Artin定理与Brauer定理

char$\mathbb{F} \nmid |G|$ & $\mathbb{F}$ 分裂，则

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}} \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G) = cf_{\mathbb{F}}(G) \quad \& \quad \# \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G) = \text{共轭类个数}$$

基本问题：1) $\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}(G) = ?$ ans: generated by $1_{\text{循环}}^{G}$ ← 易研究　Artin定理

2) $\# \mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}(G) = ?$ ans: $x \sim y \Leftrightarrow \langle x \rangle$ 与 $\langle y \rangle$ 共轭

3) 一般的特征0的域 $\mathbb{F}$, $\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G) = ?$

ans：初等子群1次$\mathbb{F}$-特征标　　Brauer诱导定理

4) $\# \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G)$

ans：$\mathbb{F}$-共轭类（e.g. x, y 落在同一个$\mathbb{Q}$-共轭类 $\Leftrightarrow \langle x \rangle$ 与 $\langle y \rangle$ 共轭）

§5.1. 有理特征标的Artin定理

定理 1.3 (E.Artin) 有限群G的每一个有理特征标χ均可表述成

$$\chi = \sum_{C \leq G:\text{循环}} a_C \cdot 1_C^G$$

其中，

$$a_C = \frac{1}{[G:C]} \sum_{\substack{C^* \supseteq C \\ \text{包含}C\text{的循环子群}}} \mu([C^*:C])\, \chi(z^*) \quad \leftarrow z^* \text{为} C^* \text{的生成元}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n\text{有平方因子} \\ (-1)^r & n = p_1 \cdots p_r \end{cases}$$

推论 1.2 (Möbius函数)：Möbius函数为积性函数 满足 $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n=1, \\ 0 & n>1. \end{cases}$

i.e. $(m,n)=1 \Rightarrow \mu(mn) = \mu(m) \cdot \mu(n)$

引理 5.1.1. χ为G的有理特征标．若$\langle g \rangle$与$\langle g' \rangle$在G中共轭，则$\chi(g) = \chi(g')$.

特别地，若$(n, \mathrm{ord}(g)) = 1$，则$\chi(g^n) = \chi(g)$.

Pf: $\chi=$ 类函数 $\Rightarrow$ 不妨设 $g'=g^n,\ (n,\mathrm{ord}(g))=1$.

不可约/因

$\Rightarrow$ 设 g 的特征多项式为 $P_g(t)=\prod_i \Phi_{n_i}(t)\quad (n_i \mid \mathrm{ord}(g))$

$\Rightarrow$ g^n 的特征多项式仍为 $P_g(t)$

$\Rightarrow$ $\chi(g^n)=\chi(g)$ $\square$

Pf (Brauer): $\chi^*:=\sum\limits_C a_C 1_C^G$. 下证 $\chi=\chi^*$.

· $$1_C^G(g)=\frac{1}{|C|}\sum_{\substack{x\in G\\ x^{-1}gx\in C}} 1_C(x^{-1}gx)=\frac{1}{|C|}\#\{x\in G \mid x^{-1}gx\in C\}=\begin{cases}\frac{1}{|C|}\# N_G(\langle g\rangle) & C\text{ 含有 } g \text{ 的共轭元}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} N_G(\langle g\rangle)=\{y\in G \mid y^{-1}\langle g\rangle y=\langle g\rangle\} \xrightarrow[1:1]{x_0^{-1}gx_0\in C} \{x\in G \mid x^{-1}gx\in C\}\\ y \longmapsto yx_0 \\ \left(xx_0^{-1}\in N_G(\langle g\rangle)\Leftrightarrow \langle x^{-1}gx\rangle=\langle x_0^{-1}gx_0\rangle \Leftrightarrow x^{-1}gx\in C\right)\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \chi^*(g)=\sum_{C:\text{循环子群}} a_C 1_C^G=|N_G(\langle g\rangle)|\sum_{C:\text{含与}\langle g\rangle\text{共轭的循环子群}}\frac{a_C}{|C|}$$

记 $\langle x_1^{-1}gx_1\rangle=\langle g\rangle,\cdots,\langle x_r^{-1}gx_r\rangle$ 为与 $\langle g\rangle$ 共轭的全体子群. 则

$$r=\frac{|G|}{|N_G(\langle g\rangle)|}$$

$$\left(\frac{a_{x_iCx_i^{-1}}}{|x_iCx_i^{-1}|}=\frac{a_C}{|C|}\right)$$

$$\Rightarrow \chi^*(g)=|N_G(\langle g\rangle)|\sum_{i=1}^{r}\sum_{C\ni x_i^{-1}gx_i}\frac{a_C}{|C|}=\underbrace{r\cdot|N_G(\langle g\rangle)|}_{\overset{\#G}{\|}}\cdot\sum_{C\ni g}\frac{a_C}{|C|}$$

$$=\sum_{C\ni g}\sum_{C^*\supseteq C}\mu([C^*:C])\,\chi(z^*)=\sum_{C^*\ni g}\chi(z^*)\sum_{g\in C\subseteq C^*}\mu([C^*:C])\overset{5.12}{=}\chi(g)$$

②

$\sim$: $x\sim y \Leftrightarrow \langle x\rangle$与$\langle y\rangle$共轭 比共轭类分拆粗糙.

$[x] := \{y\in G \mid y\sim x\} \Rightarrow G = \coprod_{i=1}^{m} [x_i]$

Euler函数

$C_i := \langle x_i\rangle \quad n_i := \# C_i \Rightarrow |[x_i]| = \underbrace{[G : N_G(C_i)]}_{\text{共轭群数}} \cdot \underbrace{\varphi(n_i)}_{\text{每个群的生成元数}}$

$Cf^{\mathbb{Q}}(G) := \{f : G\to\mathbb{Q} \mid f$为$\sim$的类函数$\} \subseteq Cf_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$

引理1.1.1 $\Rightarrow Irr_{\mathbb{Q}}(G) \subseteq Cf^{\mathbb{Q}}(G)$

定理1.5. $\langle Irr_{\mathbb{Q}}(G)\rangle = Cf^{\mathbb{Q}}(G)$

即，有理群G的不可约有理表示的个数等于G的互不共轭的循环子群个数

Pf: 记 $f_i([x_j]) = \delta_{ij}\ (1\le i,j\le m)$. 则仅需证明 f_i 可由有理特征标线性组出.

$$t_C := \sum_{C'\le C} \frac{1}{[C:C']}\mu([C:C'])\, 1_{C'}^{C}$$

$$\Rightarrow t_C(g) = \begin{cases} 1 & g\in C \ \& \ \langle g\rangle = C \\ 0 & g\in C \ \& \ \langle g\rangle \ne C \end{cases} \quad (C\text{上对}\sim\text{的类函数})$$

$$\left(\begin{aligned} t_C(g) &= \sum_{C'\le C} \frac{1}{[C:C']}\mu([C:C'])\, \underline{1_{C'}^{C}(g)} \qquad \underline{1_{C'}^{C}(g)} = \frac{1}{|C'|}\sum_{\substack{x\in C\\ g\in C'}} 1_{C'}(g) = \begin{cases} [C:C'] & g\in C' \\ 0 & g\notin C' \end{cases} \\ &= \sum_{g\in C'\le C} \mu([C:C']) \\ &= \begin{cases} 1 & C = \langle g\rangle \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow f_i = \frac{|C_i|}{|N_G(C_i)|}\cdot t_{C_i}^{G} \qquad 1\le i\le m$$

$\langle x^{-1}x_j x\rangle \ne C_i \Rightarrow t_{C_i}(x^{-1}x_j x) = 0$

$$\left(\begin{aligned} t_{C_i}^{G}(x_j) &= \frac{1}{|C_i|}\sum_{\substack{x\in G\\ x^{-1}x_j x\in C_i}} t_{C_i}(x^{-1}x_j x) \overset{j\ne i}{=\!=} 0 \\ &\overset{i=j}{=\!=} \frac{1}{|C_i|}\sum_{x\in N_G(\langle C_i\rangle)} 1 = \frac{N_G(\langle C_i\rangle)}{|C_i|} \end{aligned} \right)$$

□

§ Brauer 诱导定理 和 Brauer 分裂域定理

定义2.1. 初等群: $G = C \times P$　　C: 循环　P: p群　满足 $(p, |C|)=1$

定理2.2 (Brauer 诱导定理) $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$ & $\mathbb{F}$ 分裂 G 的所有子群 有限群 G 的任一 $\mathbb{F}$-特征标是 G 的某些初等子群的一次 $\mathbb{F}$-特征标的诱导特征标的整线性组合

推论 (Brauer) $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$. $m = G$ 的指数. 若 $\zeta_m \in \mathbb{F}$, 则 $\mathbb{F}$ 为 G 的分裂域.

Pf: 仅需证明: $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}} G \subseteq \mathrm{Irr}_{\mathbb{F}} G$.

$\forall \chi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}} G \overset{\text{Brauer}}{\underset{\text{诱导}}{\Longrightarrow}} \chi \in \sum_{\lambda:\text{初等一次}} \mathbb{Z}\lambda^G \Rightarrow \chi(g) \in \mathbb{Z}[\zeta_m]$

$\Rightarrow \chi = a_1\chi_1 + \cdots + a_r\chi_r \quad a_i \in \mathbb{Z}$, χ_i 为 $\mathbb{F}$-特征标.

$(\chi, \chi)=1 \Rightarrow r=1$ & $a_1=1$. □

推论: $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ 为 G 的全体子群的分裂域.

定理 (Brauer) $m = G$ 的指数. 若 $\zeta_m \in \mathbb{F}$, 则 $\mathbb{F}$ 为 G 的分裂域.

Pf: 设 $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = p > 0$.

$\zeta_m \in \mathbb{F} \Rightarrow p \nmid |G|$

$\Rightarrow \mathbb{F}G \cong M_{n_1}(\mathbb{F}_1) \times \cdots \times M_{n_r}(\mathbb{F}_r)$　其中 $\mathbb{F}_i$ 为 $\mathbb{F}$ 的有限可分扩张

$z \mapsto (\varphi_1(z), \cdots, \varphi_r(z))$

$\Rightarrow Z(\mathbb{F}G) \cong \mathbb{F}_1 \times \cdots \times \mathbb{F}_r$

$z \mapsto \left(\frac{1}{n_1}\chi_1(z), \cdots, \frac{1}{n_r}\chi_r(z)\right)$

$\Rightarrow \mathbb{F}_i = \mathbb{F} \quad \forall i \quad \left(\frac{1}{n_i}\chi_i(z) \in \mathbb{F}(\zeta_m) \subseteq \mathbb{F}\right)$

$\Rightarrow \mathbb{F}$ 为 G 的分裂域

§ 不可约常表示的个数

$\operatorname{char}\mathbb{F} \nmid |G|$. $\# \operatorname{Irr}_{\mathbb{F}} G = ?$

$m :=$ G的指数 $\zeta_m \in \overline{\mathbb{F}}$ $L = \mathbb{F}(\zeta_m) \Rightarrow L/\mathbb{F} =$ 有限Galois扩张 (可分正规)

- $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{F}) \hookrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ $\sigma \longmapsto t_\sigma$ (s.t. $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{t_\sigma}$)
- $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{F}) \curvearrowright G$ $\sigma(g) := g^t$

定义: 1) 称 G 在 $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{F})$ 下作用轨道共轭类的并为G的$\mathbb{F}$-共轭类. i.e.

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists\, \sigma \in \operatorname{Gal}(L/\mathbb{F}) \text{ s.t. } g_1 \text{ 与 } g_2^{\sigma_t} \text{ 共轭})$$

2) 称 G上$\mathbb{F}$-值函数 f 为$\mathbb{F}$-共轭类函数, 若 f 在 G 的每个$\mathbb{F}$-共轭类上为常值函数

$$\operatorname{Cf}^{\mathbb{F}}(G) = \{\mathbb{F}\text{-共轭类函数}\} \subseteq \operatorname{Cf}_{\mathbb{F}}(G)$$

定理: 设 $\operatorname{char}\mathbb{F} \nmid |G|$. 则 $\operatorname{Irr}_{\mathbb{F}}(G)$ 为 $\operatorname{Cf}^{\mathbb{F}}(G)$ 的一组基. 特别地

$$\# \operatorname{Irr}_{\mathbb{F}}(G) = \#\{G\text{的}\mathbb{F}\text{-共轭类}\}$$

$$\begin{cases} \mathbb{F}G = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r) & (V_i, e_i) \\ 1 = e_1 + \cdots + e_r & \\ EG = (M_{m_{11}}(E) \times \cdots \times M_{m_{1s_1}}(E)) \times \cdots \times (M_{m_{r1}}(E) \times \cdots \times M_{m_{rs_r}}(E)) & (V_{ij}, e_{ij}) \\ 1 = (e_{11} + \cdots + e_{1s_1}) + \cdots + (e_{r1} + \cdots + e_{rs_r}) & \end{cases}$$

$$\operatorname{Gal}(E/\mathbb{F}) \curvearrowright EG \Rightarrow \operatorname{Gal}(E/\mathbb{F}) \curvearrowright \{e_{ij} \mid 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s_i\} = \Sigma$$

引理: $\Sigma = \coprod_i \{e_{ij} \mid 1 \le j \le s_j\}$ 为轨道拆分.

pf
- $e_i e_{ij_0} = e_{ij_0} \Rightarrow e_i e_{ij_0}^\sigma = e_{ij_0}^\sigma \Rightarrow e_{ij_0}^\sigma \in \{e_{ij} \mid 1 \le i \le s_j\}$
- 若 $\{e_{ij} \mid 1 \le j \le s_j\}$ 包含两个以上轨道, 则 轨道和 给出 e_i 的非平凡中心幂等分解了.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\rho^\sigma"'] & GL_m(E) \arrow[d, "\sigma"] \\ & GL_m(E) \end{tikzcd} \Rightarrow \chi^\sigma(g) := (\chi(g))^\sigma$$

推论：1) $m_{i1} = m_{i2} = \cdots = m_{is_i} =: m_i$

2) $\{\chi_{ij} \mid 1\le i\le r,\ 1\le j\le s_i\} = \coprod_i \{\chi_{ij} \mid 1\le j\le s_i\}$ 为轨道拆分

3) $n_i \chi_i = m_i \sum_j \chi_{ij}$

Pf of thm. $\forall\ \psi \in cf^{\mathbb{F}}(G) \subseteq cf_E(G) \Rightarrow \psi = \sum_{ij} (\psi, \chi_{ij}) \chi_{ij}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\psi, \chi_{ij}) \in \mathbb{F} \\ \qquad\qquad a_i \in \mathbb{F} \\ \qquad\qquad \parallel \\ (\psi, \chi_{ij}) = (\psi, \chi_{ij'}) \end{cases} \left(\begin{aligned} (\psi, \chi_{ij})^\sigma &= \frac{1}{|G|} \sum_g \psi(g) \cdot \chi_{ij}(g^{-1})^\sigma \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g \psi(g^{t_\sigma}) \chi_{ij}(g^{-t_\sigma}) = (\psi, \chi_{ij}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g \psi(g)\, \chi_{ij}^\sigma(g^{-1}) = (\psi, \chi_{ij}^\sigma) \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow \psi = \sum_i a_i \sum_j \chi_{ij} = \sum_i \frac{a_i n_i}{m_i} \chi_i \in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}} G)$$

推论 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}} G \xrightarrow{\exists 1:1} \Omega = \mathrm{Irr}_E G / \mathrm{Gal}(E/\mathbb{F})$.

$\quad U \mapsto \mathrm{orb}(M)$